第 34 卷 第 4 期　厦门大学学报(自然科学版)　Vol. 34 No. 4
1995 年 7 月　Journal of Xiamen University (Natural Science)　Jul. 1995

时离散代数 Riccati 方程正半定解的矩阵界和简单迭代[①]

卢 琳 璋
(数学研究所)

摘要　给出时离散代数 Riccati 方程正半定解的一个上下界和一个简单迭代,并有数值例子.

关键词　Riccati 方程,矩阵正(半)定,迭代

中国图书分类号　O 241.6, O 241.7

考虑时离散代数 Riccati 方程(DARE):

$$F^TXF-X-F^TXG_1(G_2+G_1^TXG_1)^{-1}G_1^TXF+H=0 \tag{1}$$

这里 F、X、$H\in R^{n\times n}$,$G_1\in R^{n\times m}$,$G_2\in R^{m\times m}$,且 $G_2^T=G_2>0$(正定),$H^T=H\geqslant 0$(正半定). DARE 经常出现在诸如信号处理和控制论这些研究领域[1,2].

设 H 有满秩分解 $H=C_1^TC_1$,那末在(F,G_1)和(F^T,C_1^T)可稳的条件下,(1)有唯一的正半定解 X[1,2]. 但是要计算这个解 X 是困难的,即使要给出 X 的比较精确的估计也不容易. [3]仅给出了 X 的一个下界,且是在 $G_2=I$,设 $X>0$ 的条件下给出的. 本文将给出比[3]更精确的下界,并由此导出一个求 X 的简单迭代和 X 的一个上界.

1　记号和基本引理

为方便起见,记

$$D(X)\equiv F^TXF-F^TXG_1(G_2+G_1^TXG_1)^{-1}G_1^TXF+H \tag{2}$$

这样(1)可以表示为 $X=D(X)$. 设 U、$V\in R^{n\times n}$,$U>(\geqslant)V$ 表示 U、V 是对称的,且 $U-V$ 是正定(正半定)的,或 $U-V>(\geqslant)0$.

引理 1[4]　给定 U、$V\in R^{n\times n}$,若 $U\geqslant V>0$,那么

$$V^{-1}\geqslant U^{-1}>0 \tag{3}$$

引理 2[4]　给定 U、$V\in R^{n\times n}$,若 $U\geqslant V>0$,那么对任意 $A\in R^{n\times r}$

$$A^TUA\geqslant A^TVA\geqslant 0 \tag{4}$$

引理 3[5]　设矩阵 $A\in R^{n\times n}$非奇,U、$V\in R^{n\times n}$,则

$$(A+UV^T)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}U(I+V^TA^{-1}U)^{-1}V^TA^{-1} \tag{5}$$

(5)是著名的 Sherman-Morrison-Woodburg(S-M-W)公式.

① 本文 1994-12-09 收到;　国家基础性研究重大关键项目和福建省自然科学基金资助项目

2　主要结果

引理 1　如果 $U \geqslant V \geqslant 0$，那么

$$D(U) \geqslant D(V) \tag{6}$$

证　对任意小的正数 α，由于 $U \geqslant V \geqslant 0$，有

$$U+\alpha I \geqslant V+\alpha I > 0 \tag{7}$$

由引理 1，$(V+\alpha I)^{-1} \geqslant (U+\alpha I)^{-1} > 0$，再由 $G_2 > 0$ 及引理 2 可得 $G_2^{-1} > 0$，$G_1 G_2^{-1} G_1^T \geqslant 0$，从而

$$(V+\alpha I)^{-1}+G_1 G_2^{-1} G_1^T \geqslant (U+\alpha I)^{-1}+G_1 G_2^{-1} G_1^T > 0 \tag{8}$$

仍由引理 1 又得

$$[(U+\alpha I)^{-1}+G_1 G_2^{-1} G_1^T]^{-1} \geqslant [(V+\alpha I)^{-1}+G_1 G_2^{-1} G_1^T]^{-1} > 0 \tag{9}$$

S-M-W 公式给出

$$\begin{aligned}
&[(U+\alpha I)^{-1}+G_1 G_2^{-1} G_1^T]^{-1} \\
&\quad =[(U+\alpha I)^{-1}+G_1 G_2^{-\frac{1}{2}})(G_1 G_2^{-\frac{1}{2}})^T]^{-1} \\
&\quad =U+\alpha I-(U+\alpha I) G_1 G_2^{-\frac{1}{2}}[I+G_2^{-\frac{1}{2}} G_1^T(U+\alpha I) G_1 G_2^{-\frac{1}{2}}]^{-1} G_2^{-\frac{1}{2}} G_1^T(U+\alpha I) \\
&\quad =U+\alpha I-(U+\alpha I) G_1[G_2+G_1^T(U+\alpha I) G_1]^{-1} G_1^T(U+\alpha I)
\end{aligned}$$

因此，(9) 可以写成

$$\begin{aligned}
&U+(U+\alpha I) G_1[G_2+G_1^T(U+\alpha I) G_1]^{-1} G_1^T(U+\alpha I) \\
&\quad \geqslant V-(V+\alpha I) G_1[G_2+G_1^T(V+\alpha I) G_1]^{-1} G_1^T(V+\alpha I)
\end{aligned}$$

在上式两边令 $\alpha \rightarrow 0$，即得

$$U-U G_1(G_2+G_1^T U G_1)^{-1} G_1^T U \geqslant V-V G_1(G_2+G_1^T V G_1)^{-1} G_1^T V$$

应用引理 2，即得 $D(U) \geqslant D(V)$.　证毕.

推论 2　设 X 是(1)的唯一正半定解，$U \geqslant X$ $(X \geqslant V)$，则

$$D(U) \geqslant X \ (X \geqslant D(V)) \tag{10}$$

证　由定理 1，$D(U) \geqslant D(X)=X$ $(X=D(X) \geqslant D(V))$. 证毕.

定理 3　对任意的 $U \geqslant 0$，$D(U)-H \geqslant 0$

证　由于 $D(U)-H=F^T(U-U G_1(G_2+G_1^T U G_1)^{-1} G_1^T U) F$，由引理 2，要证 $D(U)-H \geqslant 0$，只要证

$$U-U G_1(G_2+G_1^T U G_1)^{-1} G_1^T U \geqslant 0 \tag{11}$$

即可. 设 U 有分解 $U=U_1^T U_1$，记 $K=U_1 G_1$ 则

$$\begin{aligned}
U-U G_1(G_2+G_1^T U G_1)^{-1} G_1^T U &=U_1^T[I-U_1 G_1(G_2+G_1^T U_1^T U_1 G_1)^{-1} G_1^T U_1^T] U_1 \\
&=U_1^T[I-K(G_2+K^T K)^{-1} K^T] U_1
\end{aligned}$$

这样，要证(11)，只要证

$$I-K(G_2+K^T K)^{-1} K^T \geqslant 0 \tag{12}$$

记 $M=K G_2^{-1} K^T$，则 $M \geqslant 0$，且由 S-M-W 公式

$$\begin{aligned}
K(G_2+K^T K)^{-1} K^T &=K[G_2^{-1}-G_2^{-1} K^T(I+K G_2^{-1} K^T)^{-1} K G_2^{-1}] K^T \\
&=M-M(I+M)^{-1} M
\end{aligned}$$

对 M 的任一特征值 $\lambda \geqslant 0$，易得 $I-M+M(I+M)^{-1} M$ 有相应的特征值 $\mu=1-\lambda+\frac{\lambda^2}{1+\lambda}=\frac{1}{1+\lambda} \geqslant 0$，此即说明 M 与 $I-M+M(I+M)^{-1} M$ 有相同的完全特征向量系，且后者是正半定

的,(12)成立. 证毕.

推论 4 设 X 是(1)唯一的正半定解,则

$$X \geqslant D(H) \geqslant H \tag{13}$$

证 因为 $X \geqslant 0, H \geqslant 0$,由定理 3,$X = D(X) \geqslant H, D(H) \geqslant H$,再对 $X \geqslant H$ 应用定理 1,即有 $X = D(X) \geqslant D(H)$. 证毕.

$X \geqslant H$ 是[3]在 $G_2 = I$ 和假定 $X > 0$ 的条件下得到的. 由推论 4,得到一个比 H 更接近 X 的下界:

$$D(H) = F^T(H - HG_1(G_2 + G_1^T HG_1)^{-1}G_1^T H]F + H \tag{14}$$

3 迭代法和上界

根据上一节的结果,我们可构造一个迭代

$$X_{n+1} = D(X_n), \quad X_0 = H, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{15}$$

推论 4 说明:$X \geqslant D(X_0) = X_1 \geqslant X_0 \geqslant 0$,再由定理 1 及其推论,

$$X \geqslant D(X_1) = X_2 \geqslant D(X_0) \geqslant X_1$$

如此递推,我们得到一个正半定阵序列$\{X_n\}$,有

$$X \geqslant \cdots \geqslant X_n \geqslant X_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant X_0 \geqslant 0$$

根据[6],单调上升有上界的正半定算子序列收敛,设 $X_n \to X^*$,由(15),$X^* = D(X^*)$,即 $X^* \geqslant 0$ 是(1)的解,由(1)正半定解的唯一性,$X^* = X$.

这样我们得到一个解 DARE 的简单迭代(15),它显然是线性收敛的,但由于它的算法简便,因此可作为高阶收敛迭代法(例如 Newton 迭代)选取初值的方法.

如果 F 的谱半径小于 1,那么相应于 DARE 的时离散的 Lyapunov 方程(DLE):

$$F^T YF - Y + H = 0 \tag{16}$$

有唯一的正半定解[6]:$Y = \sum_{i=0}^{\infty}(F^T)^i HF^i$, $(F^0 = (F^0)^T = I)$

定理 5 如果 F 的谱半径小于 1,那么 DARE 的解 X 与 DLE 的解 Y 有关系:

$$X \leqslant Y \tag{17}$$

证 记 $Y_n = \sum_{i=0}^{n}(F^T)^i HF^i$,$X_n$ 是由(15)产生的,由前面的讨论知道:$X_n \to X, Y_n \to Y$. 下面用归纳法证明 $X_n \leqslant Y_n$. 当 $n=1$ 时,

$$X_1 = F^T HF - F^T HG_1(G_2 + G_1^T HG_1)^{-1}G_1^T HF + H \leqslant F^T HF + H = Y_1$$

这是由于$(G_2 + G_1^T HG_1)^{-1} > 0, F^T HG_1(G_2 + G_1^T HG_1)^{-1}G_1^T HF \geqslant 0$.

设 $n=k$ 时,有 $X_k \leqslant Y_k$,则当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned} X_{k+1} = D(X_k) &= F^T X_k F - F^T X_k G_1(G_2 + G_1^T X_k G_1)^{-1}G_1^T X_k + H \\ &\leqslant F^T X_k F + H \leqslant F^T Y_k F + H = F^T[\sum_{l=0}^{k}(F^T)^l HF^l]F + H \\ &= \sum_{l=0}^{k+1}(F^T)^l HF^l = Y_{k+1} \end{aligned}$$

由归纳法,$X_n \leqslant Y_n$,令 $n \to \infty$,即有 $X \leqslant Y$. 证毕.

由此定理,我们得到 X 的一个矩阵上界为

$$Y=\sum_{i=0}^{\infty}(F^T)^i H F^i$$

4 数值例子

考虑[7]中的例：

$$F=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix},\quad G_1=\begin{bmatrix}0\\ \sqrt{2}\end{bmatrix},\quad G_2=1$$

应用定理 3 和推论 4，得到 DARE 的解 X 满足

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 4/3\end{bmatrix}\leqslant X=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 3/2\end{bmatrix}\leqslant\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

用(15)迭代 7 次可得

$$\| X_7-X \|_F^2\leqslant 3.0\times 10^{-10}$$

再考虑[2]中的例：

$$F=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\qquad H=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\qquad G_1=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\qquad G_2=\frac{1}{4}$$

推论 4 与定理 3 给出解 X 满足：

$$\begin{bmatrix}\frac{5}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\leqslant X=\begin{bmatrix}1.3289138 & 0.6578266 & 0.31565533 & 0.13131066\\ & 1.31565533 & 0.63131066 & 0.26262131\\ \text{Symmetric} & & 1.26262131 & 0.52524263\\ & & & 1.05048525\end{bmatrix}$$

$$\leqslant\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4 & 2 & 1 & \frac{1}{2}\\ 2 & 4 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 2\\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

用(15)迭代 12 次，得到

$$\| X_{12}-X_{11} \|_F^2\leqslant 2.0\times 10^{-8}.$$

参　考　文　献

1　Laub A J. *Computational and combinatorial method in system theory*. North-Holland：Elsevier Science Publishers B. V. 1986

2　Lin-zhang Lu and Wen-wei Lin. An Iterative algorithm for the solution of the discrete-time algebraic Riccati equation. *Linear Algebra and Its Applications*, 1993：188～189；465～488

3　Garloff J. Bounds for the eigenvalues of the solution of the discrete Riccati and Lyapunov equations and the continuous Lyapunov equations. *Int. J. Control*, 1986，43：423～431

4　倪国熙. 常用的矩阵理论和方法. 上海：上海科技出版社

5 王德人. 非线性方程组解法与最优化方法. 北京:人民教育出版社

6 黄琳. 系统与控制理论中的线性代数. 北京:科学出版社

7 Pappas T et al. On the numerical solution of the discrete time algebraic Riccati equation. *IEEE Trans. Auto. Control*, 1980, 25: 631～641

Matrix Bounds and Simple Iteration for the Positive Semidefinite Solution to Discrete-Time Algebraic Riccati Equation

Lu Linzhang

(*Inst. of Math.*)

Abstract An upper and lower matrix bounds for the positive semidefinite solution to discrete-time algebraic Riccati eqution, and a simple iteration are presented. There are two simple numerical examples.

Key words Riccati equation, Positive (semi-)definite matrix